**Fundamentalne twierdzenie:**

Każda baza przestrzeni V składa się z dokładnie tylu samu wektorów; liczbę tę nazywamy *wymiarem przestrzeni V* i zapisujemy dim V.

**Ad 1.a.)** Skoro $\begin{bmatrix} 2x \\ x+y \\ 3x-y \\ x-2y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ($x$, $y$ – dowolne współczynniki), to taki układ dwóch wektorów zadaje płaszczyznę (w 4D przestrzeni). Wektory bazy zostały wypisane explicité, zaś wymiar podprzestrzeni jest równy liczbie wektorów bazy, tutaj: 2.

**Ad 1.b.)** Skoro $\begin{bmatrix} x-2y-z \\ 2x+y-3z \\ 3x+4y-5z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ , to pozostaje nam sprawdzić, czy owe trzy wektory nie są liniowo zależne. Np. czy istnieją takie $\alpha, \beta,$ że $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ . Policz, a okaże się, że, owszem, istnieją: α = -1/7, β = -5/7. Zatem układ jest zależny liniowo: z bazy trzeba wyrzucić dowolny wektor (gdyby jeden z nich był przeskalowanym drugim, to trzeba by było któryś z nich; u nas jednak mamy dowolność wyrzucenia). Znów wymiar wynosi 2, ten układ rozpina zaledwie płaszczyznę.

**I tak dalej...**

**Fundamentalna definicja:**

Odwzorowanie pomiędzy dwiema przestrzeniami wektorowymi *F:* $X \to Y$ jest **liniowe** wtedy, gdy spełnia dwa warunki:

$$\forall x_{1,} x_2 \in X : F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \quad \text{(addytywność);}$$

(zauważ, że znaki „+” w nawiasie i poza nawiasami odnoszą się do dodawania zdefiniowanego w dwóch różnych przestrzeniach, *X i Y)*

$$\forall \lambda \in K, x \in X : F(\lambda x) = \lambda F(x) \quad \text{(jednorodność).}$$

(widać, że *X* oraz *Y* mają z definicji *to samo* ciało liczbowe *K* przy mnożeniu przez liczbę).

**Ważne, choć oczywiste własności odwzorowania liniowego:**

(1) $F(0) = 0$ ;

(2) $F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k) = \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + ... + \lambda_k F(x_k)$ ;

(3) $F(\ \langle x_1; x_2; \dots; x_s\rangle\ ) = \langle F(x_1); F(x_2); \dots F(x_s)\rangle$

(*F*-obrazem zbioru (w *X)* rozpiętego przez układ wektorów, jest zbiór (w *Y)* rozpięty przez układ wartości *F* od tych samych wektorów);

(4) *F*-obrazem podprzestrzeni (w *X)* jest podprzestrzeń (w *Y*).

(5) *F*-przeciwobrazem podprzestrzeni (w *Y)* jest podprzestrzeń (w *X).*

**Ad 2.)** W każdym przypadku trzeba sprawdzić addytywność i jednorodność.

**Np. 2.c.)**

$F(x_1+x_2)=(x_1+x_2+1)(x_1+x_2-1)=(x_1+x_2)^2-1.$

Zaś $F(x_1)+F(x_2)=(x_1+1)(x_1-1)+(x_2+1)(x_2-1)=x_1^2-1+x_2^2-1=x_1^2+x_2^2-2.$

Nie wychodzi na to samo, a zatem odwzorowanie nie spełnia warunku addytywności.

**Np. 2.g.)**

$$F(a\vec{x})=F(a\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})=F(\begin{bmatrix}ax\\ay\\az\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}ax+1\\ay+2\\az+3\end{bmatrix}.$$

Tymczasem $aF(\vec{x})=aF\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}x+1\\y+2\\z+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+a\\by+2b\\cz+3c\end{bmatrix}$ . Nie wychodzi na to samo, zatem odwzorowanie nie spełnia warunku jednorodności.

(Nb. w ogóle, jeśli w którejkolwiek współrzędnej we wzorze *F* jest wolny wyraz (tutaj: 1, 2 i 3), to jednorodność nie może być spełniona. Zaczynasz już rozumieć, dlaczego równanie różniczkowe bez wolnego wyrazu nazywamy jednorodnym...)

**I tak dalej...**

**Definicja (jądro, obraz i rząd odwzorowania):**

$ker\,F\ :=\ F^{-1}(\{0\})\ =\ \{x\in X: F(x)=0\}\subset X$ (jądro *F*);

(widać, że do jądra każdego odwzorowania liniowego zawsze należy 0 (por. własność 1) )

$im\,F\ :=\ F(X)\ =\ \{F(x): x\in X\}\subset Y$ (obraz *F*);

$rk\,F\ :=\ dim(im\,F)\in\mathbb{N}_+$ (rząd *F*).

**Ważny fakt:**

Jeśli *X, Y* są skończenie wymiarowe, a *F:X*$\to$*Y* jest liniowe, to istnieją bazy: $\hat{e}_1,\dots\hat{e}_n$ w *X* oraz $\hat{f}_1,\dots\hat{f}_m$ w *Y*, takie, że

$$F(\hat{e}_1)=\hat{f}_1,\quad F(\hat{e}_2)=\hat{f}_2,\ldots,\quad F(\hat{e}_r)=\hat{f}_r,$$
$$\forall\, r<i<n: F(\hat{e}_i)=0,\quad gdzie\quad r\equiv rk\,F.$$

**Wniosek:**

$dim\ ker\ F\ +\ dim\ im\ F\ =\ dim\,X$ (bilans wymiarów)

$(\equiv\ dim\ ker\ F\ +\ rk\ F)$

gdyż bazą *ker F* jest $\hat{e}_{r+1},\ldots,\hat{e}_n$ , bazą *im F* jest $\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_r$ ; *n* – *r* + *r* = *n* = *dim X*.

**Ad 3.)**

Z Definicji i Ważnego faktu.

**Np. 3.a.)**

Jądro: dla jakich $\vec{x}=[x_1\ ,x_2\ ,x_3]$ $F(\vec{x})=\vec{0}\equiv[0;0]\in\mathbb{R}^2$ ?

$$x_1+x_2=0\ \wedge\ x_2+x_3=0\ \Leftrightarrow\ x_1\sim dowolne,\ x_2=-x_1,\ x_3=x_{1.}$$

Czyli $\vec{x}\in ker\,F\ \Leftrightarrow\ \vec{x}=a[1;-1;1]$. Oto baza jądra, które jest 1-wymiarowe. Z bilansu wymiarów wiemy, że rząd *F* ma wymiar 2 (wszak przestrzeń $X=\mathbb{R}^3$ jest 3-wymiarowa).

Dalej będę pisał wektory na sztorc. $F(\vec{x})=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Bazę obrazu *F* tworzą dowolne dwa wektory z tej rozpiski (trzy są l.zal., co zauważamy natychmiast, a także wiemy stąd, że *rk F* ≡ *dim im F* = 2 ).

**I tak dalej...**